Section A2 (programme P')

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Préliminaires et notations

On désigne par $\mathbb{R}$ *l'ensemble des nombres réels. Une application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *sera dite localement intégrable si elle est intégrable sur tout intervalle fermé borné* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$. *On pourra utiliser le fait que si* f *est localement intégrable, alors* g *définie par* $g(x) = f(\lambda x + \mu)$ *avec* $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* λ *non nul est localement intégrable et vérifie :*

$$\int_a^b g(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a+\mu}^{\lambda b+\mu} f(t)\,dt.$$

PREMIÈRE PARTIE

On considère f, g, h et k des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ localement intégrables vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) + g(x-y) = h(x) + k(y)$$

1° On pose : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $G(x) = \int_0^x g(t)dt$, $H(x) = \int_0^x h(t)dt$

et $K(x) = \int_0^x k(t)dt$.

Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad F(x+y) - F(x) - G(x-y) + G(x) - K(y) = yh(x)$$

2° En déduire que les quatre fonctions f, g, h et k sont continues, puis qu'elles sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

3° Montrer que ce sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

DEUXIÈME PARTIE

On suppose que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) est muni de son produit scalaire canonique :

$$(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n .$$

On se propose de déterminer les applications f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés

(1) $\forall u \in \mathbb{R}^n \quad f(u) \geqslant 0$

(2) $\forall u \in \mathbb{R}^n \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \qquad u.v = 0 \Rightarrow f(u+v) = f(u) + f(v)$.

A. Cas où $n = 2$.

Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (1) et (2).

1° Calculer $f((0,0))$.

2° On se donne $u \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $\lambda > 1$.

a. Trouver deux éléments v_1 et v_2 de $\mathbb{R}^2$ tels que $\lambda u = u + v_1 + v_2$ avec $v_2 . (u + v_1) = 0$ et $u . v_1 = 0$.

b. En déduire que $f(\lambda u) \geqslant f(u)$.

3° On considère les applications φ et ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $\varphi(x) = f((x,0))$ et $\psi(x) = f((0,x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a. Quelles sont les propriétés de φ et ψ ? On montrera en particulier que φ et ψ sont localement intégrables.

b. Montrer que :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \varphi(x+y) + \psi(x-y) = \varphi(x) + \psi(x) + \varphi(y) + \psi(-y)$.

Que peut-on en déduire pour φ et ψ ?

4° En conclure qu'il existe k nombre réel positif ou nul tel que

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \qquad f(u) = k\, u . u.$$

B. Généraliser ce résultat dans le cas où $n \geqslant 3$.

TROISIÈME PARTIE

A. On se propose de déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

(C) $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2 f(x) f(y)$

On suppose que :

(*i*) f est localement intégrable;

(*ii*) l'application F définie par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ n'est pas identiquement nulle.

1° Démontrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, puis que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) = f''(0) f(x).$$

2° Déterminer explicitement les solutions f de (C) vérifiant (*i*) et (*ii*).

B. On considère les applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

(T) $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad f(x-y) = f(x) f(y) + g(x) g(y)$

1° Montrer que f est paire.

2° On suppose f non constante.

a. Démontrer que g n'est pas paire et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad g(-x) g(-y) = g(x) g(y)$$

En déduire que g est impaire.

b. Calculer $f(0)$, ainsi que $(f(x))^2 + (g(x))^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

c. Montrer enfin que f vérifie la relation (C).

3° Déterminer les solutions f et g de (T) avec f vérifiant (*i*) et (*ii*).

C. On considère les applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

(A) $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2 f(x) g(y)$

On suppose f non identiquement nul et g non constant.

1° Calculer $g(0)$, montrer que g est paire et vérifie (C).

2° On suppose f paire.

Quelle relation existe-t-il alors entre f et g ?

3° On suppose f impaire.

Montrer que si $f(r) = 0$ alors $f(x+2r) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $g(2r) = 1$.

Que peut-on dire d'une application $\tilde{f}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ impaire vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad \tilde{f}(x+y) + \tilde{f}(x-y) = 2 \tilde{f}(x) g(y)$$

4° Déterminer explicitement f et g lorsque g vérifie (*i*) et (*ii*).

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail